1　数学的準備１（ベクトル）

ここでは、高校数学で習った内容から入り、それを少し一般化しながら、力学で使ういくつかの概念を説明する。 ベクトルの内積や外積は、回転する物体や運動する物体の記述の際に有用になる。

1.1　ベクトルの導入

大きさのみしか持たないスカラー量 (scalar) に対し、方向 (direction) と大きさ (magnitude) を持っている量をベクトル (vector) 量と呼ぶ。 力、速度、加速度などは、ベクトル (vector) 量である。また、複素数[1] もそうである。３次元における物体の位置を互いに直交する３つの座標軸 (x, y, z) を用いて表す座標系を、デカルト座標という。　一般に n 次元なら、$(x_1, x_2, ..., x_n), x_i \in R$($R$ は実数) と拡張できる。ここで、x_i を成分 (conponent)、また、こういう横並びの数の組 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ を横ベクトル (row vector) とよぶ。これに対し縦並びにしたものを, 縦ベクトル (colum vector) と呼ぶ。　この横ベクトルを縦ベクトルに変換する操作を転置 (transpose) とよび、${}^t(.......)$ で表す。

$$
{}^t\Big(x_1, x_2, ..., x_n\Big) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1}
$$

　定義：　$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ でベクトル $\mathbf{x}$ のおおきさを定義し、原点 0 から位置 $\mathbf{x}$ までの距離 (distance) を表す。 大きさがゼロのベクトルをゼロベクトル、大きさが１のベクトルを単位ベクトルという。例えば、$\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, ..., 0)$, $\cdots$, $\mathbf{e}_n = (0, 0, ..., 1)$, など, また、$\frac{1}{\sqrt{N}}(1, 1, ..., 1)$ も単位ベクトルである。 単位ベクトルを使うと、$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n$ と表現できる。

1.2　ベクトルの内積

次式でベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ と $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ の内積 (inner product) を定義する。

$$
\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \equiv \sum_i^n x_i y_i = (x_1, x_2, ..., x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} \tag{2}
$$

　内積の幾何学的意味は、次の式からわかる。

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) && (3) \\
&= |\mathbf{x}|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + |\mathbf{y}|^2 && (4)
\end{aligned}
$$

三角不等式 $|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}| > |\mathbf{x} + \mathbf{y}|$ より

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{x}||\mathbf{y}| &> \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} && (5) \\
&= |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos\theta && (6)
\end{aligned}
$$

ここで、θ はベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ のなす角を表す。例えば、ベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ のなす角が直交 ($\theta = \pi/2$) するとき、その内積はゼロになる。

[1] $z = x + iy$ の大きさ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, 向き $\tan\theta = y/x$

1.3　ベクトルの外積

内積を使い、次式でベクトル $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ と $\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)$ のが外積 (outer product), $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ を定義する。まず、その大きさの２乗を考える。

$$|\mathbf{x}\times\mathbf{y}|^2+|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|^2=|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 \tag{7}$$

つまり、

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}\times\mathbf{y}|^2 &= |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2(1-\cos^2\theta) && (8)\\ &= |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2\sin^2\theta && (9) \end{aligned}$$

もちろん、外積はベクトル量である。 また、この関係を満たすように、外積 $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ の成分を決める。

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}\times\mathbf{y}|^2 &= (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2 && (10)\\ &= (x_1y_2-x_2y_1)^2+(x_1y_3-x_3y_1)^2+(x_2y_3-x_3y_2)^2 && (11) \end{aligned}$$

この形になれば、外積 $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ の定義として、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\times\mathbf{y} &= (x_2y_3-x_3y_2,x_1y_3-x_3y_1,x_1y_2-x_2y_1) && (12)\\ &= (x_2y_3-x_3y_2)\mathbf{e}_1+(x_1y_3-x_3y_1)\mathbf{e}_2+(x_1y_2-x_2y_1)\mathbf{e}_3 && (13) \end{aligned}$$

とする。　今の場合、外積の定義の決め方に符号などの任意性があるわけだが、上記の様、に対称性のいい並べ方を選ぶ事にする。

性質:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\times\mathbf{y} &= -\mathbf{y}\times\mathbf{x}(\text{向きがある}) && (14)\\ \mathbf{x}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{y}) &= \mathbf{y}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{y})=0 && (15) \end{aligned}$$

1.4　ベクトルの１次独立

ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ に対して、

$$a\mathbf{a}+b\mathbf{b}+c\mathbf{c}=0 \tag{16}$$

をみたす実数 a,b,c が、$a=0,b=0,c=0$ 以外に存在しないならば、ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ は一次独立 (linear independency) という。ゼロでない実数の組が存在すれば、一次従属という。例えば、位置ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の存在する平面内で任意の実数 a,b を用いてつくれるベクトル $\mathbf{c}=a\mathbf{a}+b\mathbf{b}$ は、ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ と一次従属である。

1.5　ベクトルと行列

さらに、ベクトルを並べたものを行列という。

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{17}$$

または、

$$A=(a_{ij}),i=1\sim n,j=1\sim n \tag{18}$$

と表される。横に並べた $(a_{11},a_{12},....,a_{1n})$ などを行 (row), 縦に並べた ${}^t(a_{11},a_{12},....,a_{1n})$ などを列 (column) という。　とくにこのように縦横の成分の数が共に n で等しいものを、$n\times n$ 正方行列という。${}^tA=(a_{ji})$ である。対角要素が全て１で他が全て０の行列を単位行列（$\mathbf{I}$）という。

性質:

- $BA = I$ をみたす行列 B を行列 A の逆行列といい、A^{-1} と表す。
- ${}^tAA = I$ ならば ${}^tA = A^{-1}$ である。

行列 A の行列式 (determinant)$|A|$ を次のよう定義する。(例として、3x3 行列をつかう。)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{19}$$

を用いると、

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \tag{20}$$