1 数学的準備2（微分・積分など）[1]

動く物体や電磁場を表現するには、三次元空間でのベクトル場に対する微分・積分が有用になる。

1.1 1変数関数の微分・積分

世界が1次元のみなら $y = f(x)$ というなめらかな連続関数の性質のみの取り扱いで十分である。その性質の見方として大雑把に2通り考える。微分と積分である。微分とは細かくみることで次のように定義される。

$$f^{'}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

積分は細かい構造を見ずに大雑把にとらえることに相当し、次のように定義される。

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \frac{x_2 - x_1}{N} \sum_{n=0}^{N} f(x_1 + n\frac{x_2 - x_1}{N}) \tag{2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \sum_{n=0}^{N} hf(x_1 + nh) \tag{3}$$

where $h = \frac{x_2 - x_1}{N}$. 「微分・積分を理解している」とは、 $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$, $\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$, $\frac{d}{dx}e^x = e^x$, $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ などを覚えて使えることではなく、最低でも上の定義にしたがって、その結果を導けるということでなければならない。

微分と積分は互いに逆演算になっているので、解析学としては特に区別する必要はない。一般に、 同じ内容を微分形でも積分形でも表すことができる。便利な方、分かりやすい方を使えばよい。

1.2 微分と勾配

時間の関数なら一変数 t なので1変数関数で十分だが、実際の空間は1次元ではなく3次元なので、x のみではなく、独立な3変数 (x, y, z) の関数 $u = f(x, y, z)$(多変数関数) が必要になる。このように定義された**スカラー関数**[2] を y と z を一定にし x のみを変化させたときの u の変化を x についての**偏導関数（偏微分）**といい、次のように与えられる。

$$\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y, z) - u(x,y,z)}{\Delta x}. \tag{4}$$

y, z についても同様に $\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}$, $\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}$ が定義できるとき、関数 $u(x, y, z)$ は**全微分**可能であり、次のように**全微分**を表す。

$$du = \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}dz. \tag{5}$$

[1] 一部未完
[2] 注：u がスカラ量でありベクトル量ではない。

これはベクトル (dx, dy, dz) とベクトル（u **の勾配ベクトル**）$(\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z})$ の内積である。これをスカラ関数 u の勾配またはグラディエントという。さらに、

$$(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}) = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})u = \nabla u \Gamma = \mathbf{grad} u \tag{6}$$

と表示し、ベクトル $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ を**ナブラ（偏微分演算子）**という。x,y,z 方向の単位ベクトル $\mathbf{e_x}$,$\mathbf{e_y}$,$\mathbf{e_z}$ を用いて表すと、

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e_z}. \tag{7}$$

ベクトル関数 $\mathbf{A}(x, y, z)$ があるスカラー関数 $u(x, y, z)$ を用いて、$\mathbf{A}(x, y, z) = -\nabla u$ と書ける時に、ベクトル関数 $\mathbf{A}(x, y, z)$ はスカラーポテンシャル $u(x, y, z)$ を持つという。

物理的意味を考える。（力学でなじみ深い内容である。）$u(x, y, z) = c$ と $u(x, y, z) = c + dc$ の近接した等高線を描こう。点 x での勾配ベクトルは等高線に垂直方向を向いている。大きさは dc を間隔 ds で割ったものである。すなわち、勾配とは、スカラー場（後述）が考えている領域で平均として、どちらの方向に強くなっていくかを示すものである。　u を位置エネルギー U、$\mathbf{A}$ を外力 $\mathbf{F}$ に対応させると、外力により位置エネルギーの差が与えらるという関係

$$\Gamma\Gamma - \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{r} = U(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) = dU(\mathbf{r}) \tag{8}$$

になる。この外力は

$$\Gamma\Gamma\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{dU(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}} = -\nabla U(\mathbf{r}) \tag{9}$$

とポテンシャル U で表現できる保存力である。　演算子 ∇ には次に恒等式が成立する。

$$\nabla \times \nabla U = 0. \tag{10}$$

一般に力の場 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ が、保存力の場であるための必要十分条件は、

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0. \tag{11}$$

である。

1.3　場の概念の導入

物理学では，ある物理量が空間や時空の関数として表されるとき，これを「場」と呼ぶ。その物理量がスカラー量である場合スカラー場、その物理量がベクトル量である場合ベクトル場という。物理に登場するほとんどのベクトル量は実はベクトルではなくベクトル場なのである
スカラー場の具体例として、「温度場 $T(x, y, z)$, 密度場 $\rho(x, y, z)$, 圧力場 $P(x, y, z)$, ...」、またベクトル場の具体例として、「速度場 $\mathbf{v}(x, y, z)$, 電場 $\mathbf{E}(x, y, z)$, 磁場 $\mathbf{H}(x, y, z)$, 様々な力の場 $\mathbf{F}(x, y, z)$(foce field), ...」などがある。要は、スカラー場はスカラー関数で、ベクトル場はベクトル関数で表されるといえる。

1.4　接線ベクトルと面積ベクトル

弧長パラメータ s で表わした空間曲線 $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ を考え, s を時間 t と考えれば, $\mathbf{v}$ の時間微分は速度を表わすことになる.

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = (\frac{\partial dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}). \tag{12}$$

点の運動を考えたいなら，t を用い速度の変化をみるべきだが，曲線の形という幾何学的性質そのものを調べたい場合，どれくらい時間がかかろうと曲線にそって動いてくれれば良いのであって，動点の速度に煩わされたくないため、パラメーターを t から s に変更するこれにより曲線上の動点の速度が，表面上問題にならなくなる.

$$|\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}| = \frac{ds}{dt}\frac{dt}{ds} = 1 \tag{13}$$

ゆえ、接線ベクトル $\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}$ は単位ベクトルである。

また、面積はスカラーなのに“ 面積ベクトル ”とは一体どういうことなのか？　まずてきとうな面 S を考え、この平面に垂直な方向（法線方向）に単位法線ベクトル $\mathbf{n_s}$ を導入する。長さがその面積に等しいベクトルを考え，これを**面積ベクトル** $\mathbf{n_s}$ という。閉曲面の面積ベクトルの総和はになる.

1.5　発散と回転

ベクトル演算子 ∇ とベクトル関数 $\mathbf{A}(x, y, z) = (A_x, A_y, A_z)$ の内積も定義できる。

$$div\mathbf{A} = \nabla \bullet \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{14}$$

これは発散 (divgergence：ダイバージェンス)，湧き出し、とも呼ばれる．物理的には、ベクトル場として流体の各点の流速のようなものを考えよう。ある面を通過して単位時間当たり、どれだけ流れ出していくかは、ベクトルの面垂直成分と面積を掛ければ計算できる。このように、ベクトル場に対して、場を流れのように見なし、それがある領域からどのくらい流れ出ているかを示す概念が発散である。勾配 (grad) や回転 (rot) の計算結果がベクトルになるのに対して，発散はスカラーとなる.

ベクトルの性質のところで見たように、ベクトル演算子 ∇ とベクトル関数 $\mathbf{A}(x, y, z) = (A_x, A_y, A_z)$ の外積も定義できる。

$$rot\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\mathbf{e_x} + (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\mathbf{e_y} + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\mathbf{e_z} \tag{15}$$

これをベクトル場の回転（rotation）という。回転とはベクトルが渦状に並んでいることを指す。地球のような閉曲面に沿って、ベクトル場が面の接線方向に絡み付いて偏西風のように回っているとする. このベクトル場は明らかに地軸を軸とする渦上の流れを構成している。もっと複雑な場合にも、このような計算をすれば、閉曲面全体で合計した渦の軸方向と強さを求めることができる。外積があちこちを向いており全体として合計すると 0 になるときは、渦はなかったというふうになる。

1.6　ガウスの発散定理

ベクトル場に対して発散 $\nabla \times \mathbf{F}$ は先に定義した。これをある体積 V の空間内で全て足し集めた量（発散量）は、その空間を取り囲む面積積分 S で表現される。これがガウスの定理（Gauss theorem）であり、厳密にはベクトル場のガウスの内積定理（Gauss inner product theorem of vector field）である。

$$\int_V \nabla \times \mathbf{F} dV = \int_S \mathbf{F} \times \mathbf{n_s} dS. \tag{16}$$

右辺は、面全体を十分細かな微小面積に分割しベクトルの微小面の垂直成分を考え、それを面全体で積分している。直観的証明は簡単である。

証明概略

右辺 $\rightarrow$ 左辺を示す。上図の微小立方体の 6 つの面に対して、

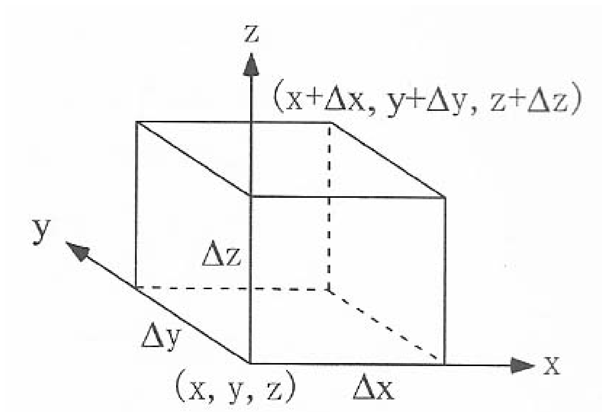

Figure 1: ガウスの定理の説明図

$$\begin{aligned}
& [F_x(x+\Delta x, y, z) - F_x(x,y,z)]\Delta y \Delta z \\
+ \quad & [F_x(x, y+\Delta y, z) - F_x(x,y,z)]\Delta x \Delta z \\
+ \quad & [F_x(x, y, z+\Delta z) - F_x(x,y,z)]\Delta x \Delta y \\
= \quad & (\frac{F_x(x+\Delta x, y, z) - F_x(x,y,z)}{\Delta x}\Delta x \Delta y \Delta z \\
+ \quad & \frac{F_x(x, y+\Delta y, z) - F_x(x,y,z)}{\Delta y}\Delta x \Delta y \Delta z \\
+ \quad & \frac{F_x(x, y, z+\Delta z) - F_x(x,y,z)}{\Delta z}\Delta x \Delta y \Delta z \\
\Longrightarrow \quad & (\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z})\Delta x \Delta y \Delta z \\
= \quad & (\nabla \bullet \mathbf{F})\Delta v
\end{aligned} \tag{17}$$

1.7　ストークスの定理

単一閉曲線 C に囲まれた曲面を S とし，$\mathbf{A}$ を S と C で連続で 1 次偏導関数をもつベクトル関数とするとき，一般に

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \bullet \mathbf{n_s} dS = \int_C \mathbf{A} \bullet d\ell. \tag{18}$$

ここで，右辺は C 上の経路に沿った微小ベクトル ℓ（接線ベクトル）とベクトル A の内積の総和である．これをストークスの定理という．電磁気学では回転の面積分を線積分に変形するときに用いる．

証明概略

図のような設定で x 成分のみを扱い左辺 $\rightarrow$ 右辺を示す。

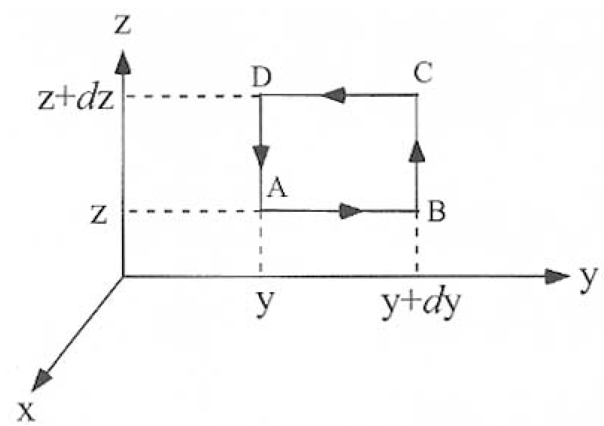

Figure 2: ストークスの定理の説明図

$$\begin{aligned}
& \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n_s} dS \\
= \; & (\nabla \times \mathbf{A})_x n_x dS \\
= \; & (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) dydz \\
= \; & (\frac{A_z(x, y + dy, z) - A_z(x, y, z)}{dy} - \frac{A_y(x, y, z + dz) - A_y(x, y, z)}{dz}) dydz \\
= \; & E_z(y + dy, z)dz - E_z(y, z)dz - E_y(y, z + dz)dy + E_y(y, z)dy \\
= \; & \int_C \mathbf{E} \bullet d\ell
\end{aligned} \tag{19}$$