5．数列と収束性

5.1 準備

●まず、高校レベルの数列、漸化式、など（数学 B）の復習をした。
n 番目の数を a_n と書く. 例えば、$a_n = n$ となるのが自然数である。$n \to$ で発散する。.....
●銀行と無限級数和（数の力　p165 より）
●宿題「松ぼっくりを 10 個ひろい、用意いしておくこと。」

5.2 Fibonacci 数と黄金比

●前 2 つの数の和を次の数とする数列はどのようなものだろうか？最初の 2 つを 1 とすると、$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...$ という 3 つごとに偶数が現われる数列が得られる。これはフィボナッチ数列と呼ばれ，それぞれの数はフィボナッチ数と呼ばれる。もし n 番目のフィボナッチ (Fibonacci) 数を F_n と書くと，$(n+1)$ 番目の数 F_{n+1} は，

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n, \tag{1}$$

と初期条件 $F_0 = F_1 = 1$ で得られる。　フィボナッチ数列でも F_{n+1} は $n \to$ で発散するが、フィボナッチ数の比 (F_n/F_{n-1}) は，n が大きくなるに従がってある無理数（黄金比）に近づく。無理数は発散する数列の比としていつも表わすことができるのである。この比を x とすれば、$x^2 = x + 1$ という 2 次方程式の解 $x = (1 + \surd\ 5)/2$ で与えられる。当然、逆数 (F_{n-1}/F_n) は 2 次方程式のもう一つの解 $x = (1 - \surd\ 5)/2$ になる。
●一般項の Fibonacci 数 F_n は黄金比を使い表すことができる。

$$F_n = \frac{1}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right), \tag{2}$$

●黄金比の実験課題「ひとつの線分 AB を一番美しい思う点で二つに分けよ。その点を C とする。さあ、線分の比 AB/AC、および比 AC/CB はいくつになったか調べよ。」

5.3 自然界における Fibonacci 数と黄金比・黄金角

●自然の生き物をよく観察すると様々なフィボナッチ数列を見いだせる。植物の葉の付き方、松ぼっくり、貝の渦の等角らせんなど。（作図。）
●課題「自然界にあるらせん構造、渦構造を挙げて考察。」

5.4 黄金比・黄金角と連分数展開

●無理数と連分数展開。　ギリシャ時代，ユークリッド (Euclid) は，２つの数が割り切れるどうか調べるための方法 (algorithm, アルゴリズム) を発見した。a と $b(< a)$ の２つの自然数があるる。a を b で割ると，商が q で余りが r であるとする ($0 < r < b$)。もし余り r がゼロなら，a は b で割り切れ，a は b の倍数 ($a = qb$) である。もし余り r がゼロでないなら，a は b で割り切れず，$a = qb + r$ である。今度は，b と r を a と b と見なして，同じことをする。その商を q'，余りを r' とすると，$b = q'r + r'$，そして余りがゼロになるまで繰り返し同じことができる。そして，もしある繰り返しの後その余りがゼロになると，結局もとの a と b の比 (a/b) は一つの分数で書けることになる。この方法をユークリッドの互除法という。この場合，次々と現われる商の数列と最後の余りを並べて，次のように書くことができる：

$$a/b = [q, q', q'', ..., q^{(n)} + r^{(n)}/r^{(n-1)}]. \tag{3}$$

そしてそれは、次のように書くこともできる：

$$a/b = q + \frac{1}{q' + \frac{1}{q'' + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{q^{(n)} + r^{(n)}/r^{(n-1)} \cdots}}}}. \tag{4}$$

これを a/b の連分数展開という。¡無理数の登場¿　一方，もし際限なくそのプロセスが繰り返されるときはどうなるのだろうか？この場合，次々と現われる商の数列は,

$$a/b = [q, q', q'', ..., q^{(n)}, ...] \tag{5}$$

と際限なく続くことになる。ユークリッドは，この場合その a/b は一つの無理数（割り切れない数、irrational number) と考えた。

$x^2 = x + 1$ という２次方程式の解を考えてみよう。両辺を x で割ると，$x = 1 + 1/x$ となる。右辺の分母の x に右辺全体を入れると，$x = 1 + 1/(1 + 1/x)$ が得られる。どんどん同じことを繰り返すと,

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}} \cdots} \tag{6}$$

と際限なく続く。これはユークリッドの互除法の特別な場合で,

$$x = [1, 1, 1, 1, 1, ...] \tag{7}$$

となる例である。2 次方程式を直に解くと，その無理数は黄金率であり，最も簡単な連分数展開の場合である。一般に、

$$x = [a, a, a, a, ., ...], \tag{8}$$

$$x = [a, b, c, a, b, c, ...], \tag{9}$$

のように数字が周期的に永遠に続くものは、それ自身のなかに自分があるという入れ子構造（階層構造）を形成している。
実数は分数のような有理数とそれ以外の無理数からなり，無理数も連分数展開の数列が決定論的に予想できる代数的性質をもつ代数的数（例えば，$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$ など) とそれが決定論的に予想できない超越数 (例えば，π, e など) に分類される。このように数の多様性もそれ自身で閉じた宇宙を作っている。
●無理数の連分数展開は永遠に続くものだが、これを途中でやめると、分数なので有理数になる。その有理数で、無理数を近似的に表すことができる。（無理数の有理数近似。）その意味において、黄金比は有理数での近似が一番良く働かない無理数、つまり、「無理数のなかの無理数」なのである。
　★自然界における対数螺旋の利用として、植物の開度や珪藻の示す螺旋がある。

参考文献

[1] 上村 文隆 (著)「生き物たちのエレガントな数学」(技術評論社 2007).
[2] D. R. ホフスタッター，「ゲーデル, エッシャー, バッハ」 (白揚社, 1985).
[3] シャーマン・K. スタイン「数の力ー暮らしの中の楽しい数学」（海文堂出版 1997).
[4] 佐藤修一「自然にひそむ数学」(講談社 1998).
[5] J.A. アダム「自然の中の数学〈上・下〉ー数学で見る自然の美しさ」(シュプリンガージャパン 2008,2009).
[6] 「黄金比 ϕ の謎」Newton 2010 年 6 月号、p76-91.
[7] 有田重彦＋大塚泰介＋戸田孝「珪藻の殻に現れたベルヌーイ螺旋」数学セミナー 2010 年 12 月号