

目的

1. 力学系の不規則な運動であるカオスを周期外力下の単振子の運動を例に考察する。
2. パラメータがゆっくりと変化する場合、調和振動子において $E/\omega (=I)$ が断熱不変量となるが、外力下の単振子においても、 I が断熱不変量になるかを考察する。

使用した単振子のモデル

運動方程式: $2mL \frac{dL}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + mL^2 \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL \sin \theta$

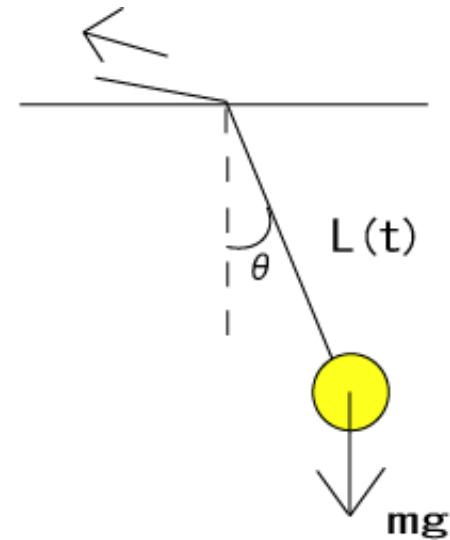
エネルギー - : $E = \frac{mL^2}{2} \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - mgL \cos \theta$

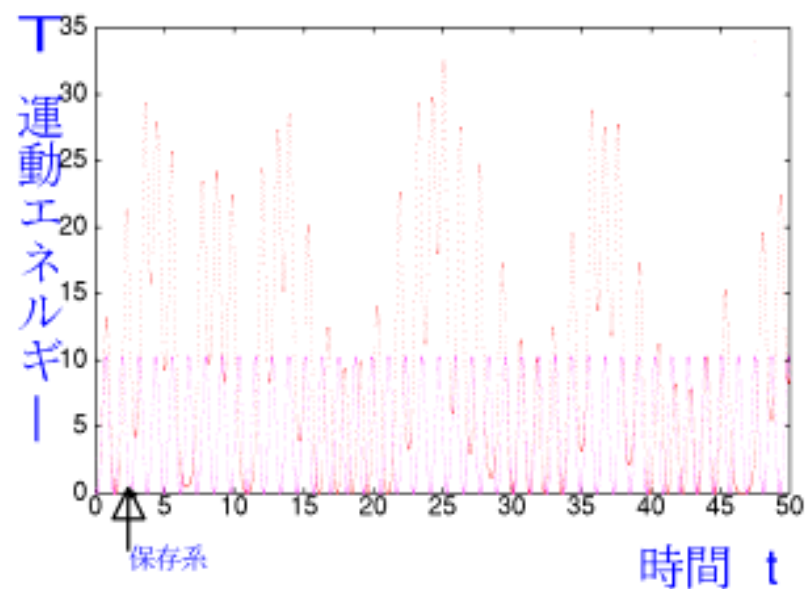
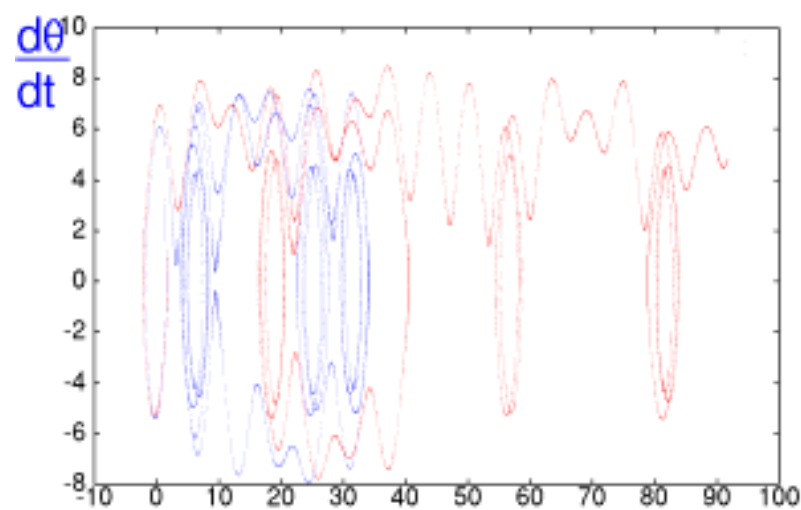
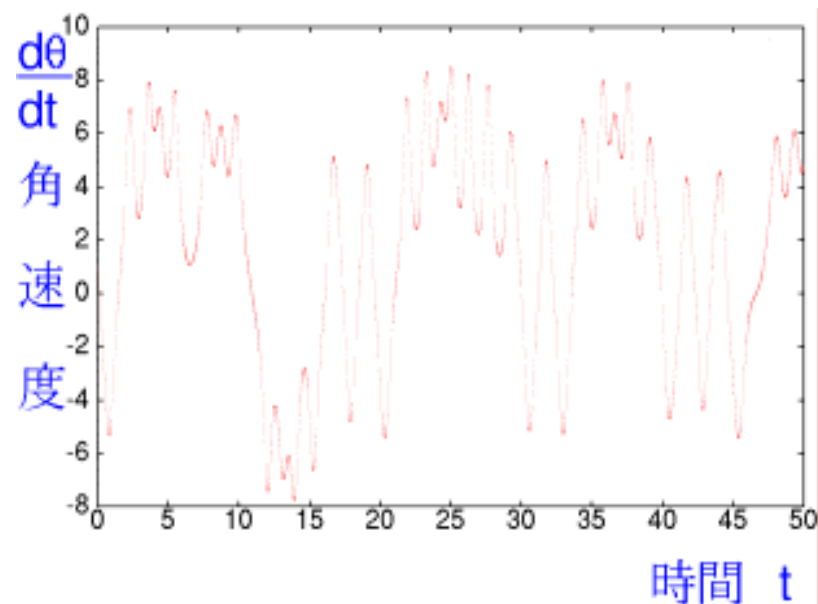
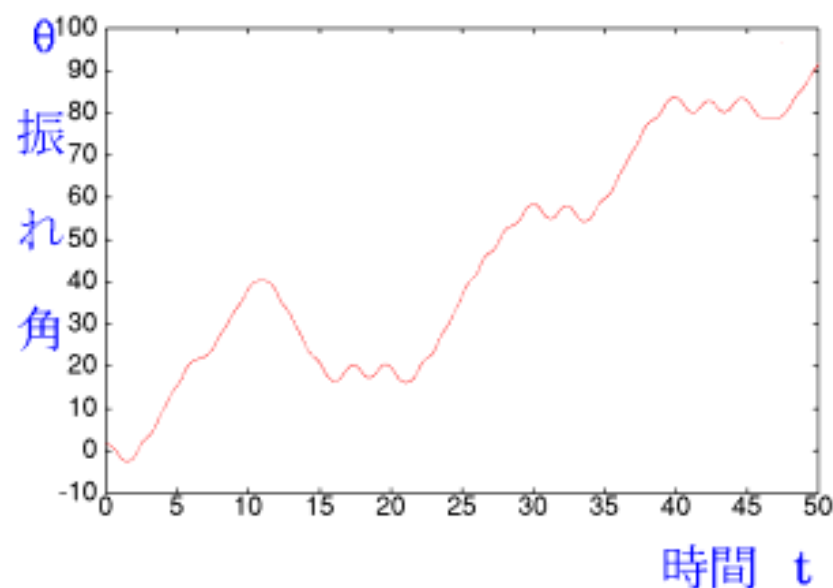
1) モデル 系の長さを $L(t) = L_0 + b \sin(\omega t)$ と変化
(正弦的に系を変化させる振子)

初期条件:

$w_0 = \sqrt{g / L_0} [1 / s]$	$m = 1.0 [kg]$
$L_0 = 1.0 [M]$	$\omega = 4.5 [1 / s]$
$b = 0.1$	$\theta = \pi / 2.0 [rad]$
$g = 9.8 [M / s^2]$	$d\theta / dt = 1.0 [rad / s]$

これより単振子の振る舞いは以下ようになる。





初期値(1) ($\theta=\pi/2.0$, $d\theta/dt=1.0$) θ

初期値(2) ($\theta=\pi/3.0$, $d\theta/dt=1.1$)

マシューの方程式

運動方程式: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -w_0(a + b\sin(\omega t))\theta$

初期条件: $w_0 = \sqrt{g / L_0} [1/s]$
 $L_0 = 1.0 [M]$
 $g = 9.8 [M/s^2]$

$a = 1.0$

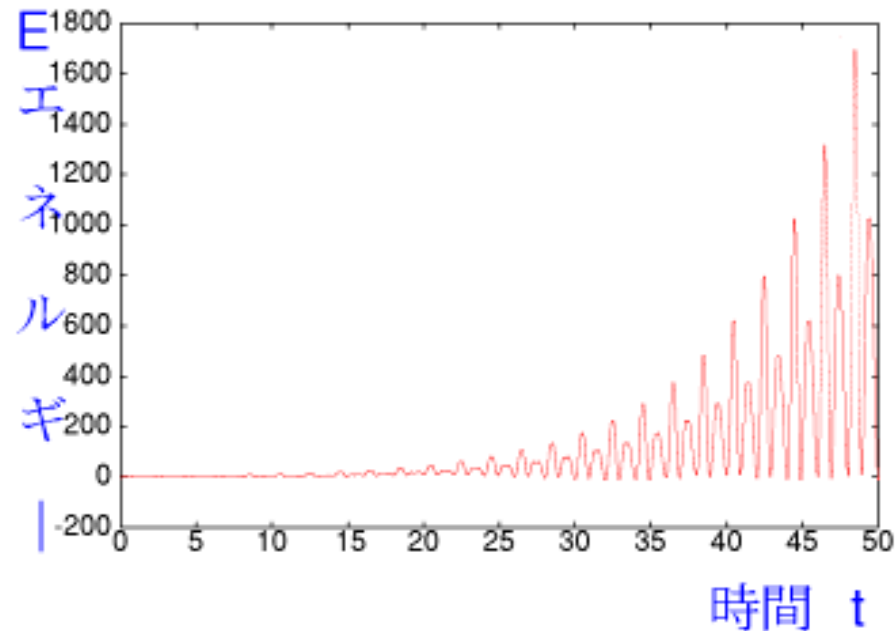
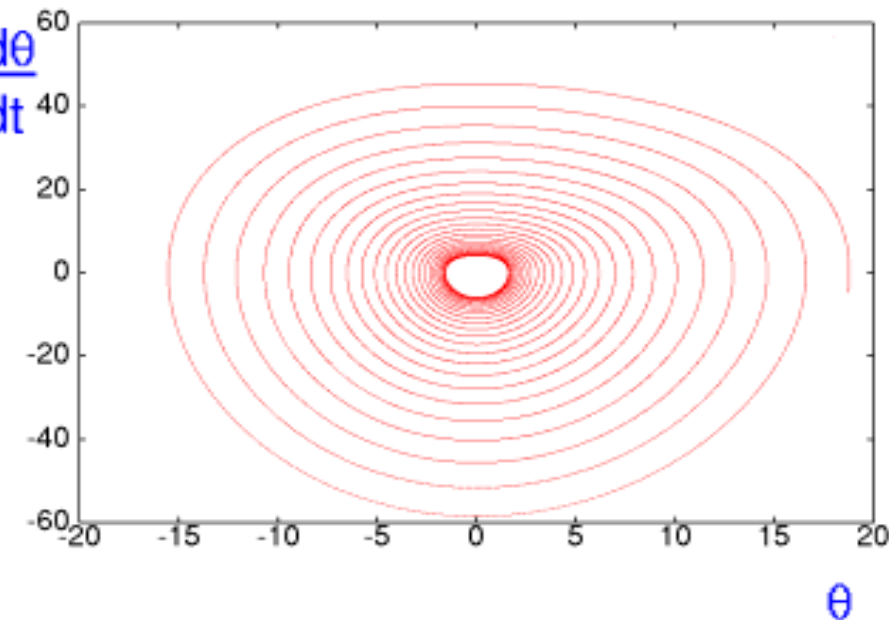
$b = 0.1$

$\omega = 3.14 [1/s]$

$m = 1.0 [kg]$

$\theta = \pi / 2.0 [rad]$

$d\theta / dt = 1.0 [rad/s]$



結果 1

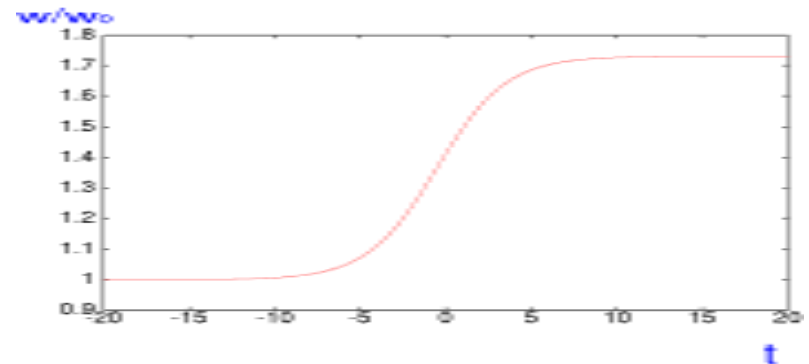
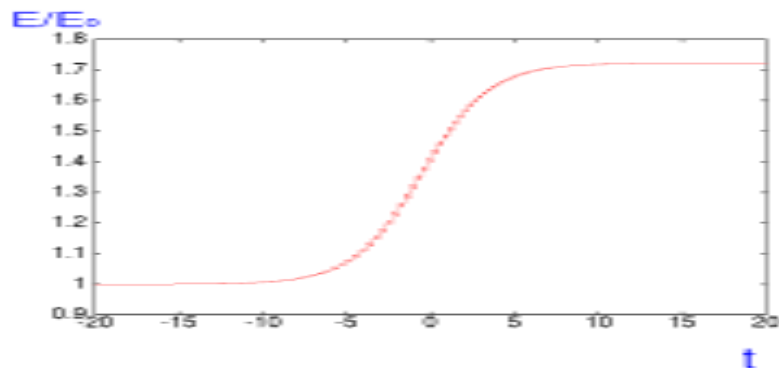
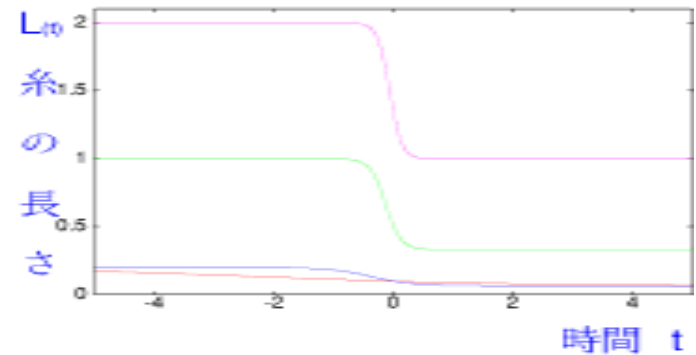
1. 系の初期条件をほんの少し変化させただけで異なった複雑な運動になる。
2. 共鳴を考えた場合、マシュ - の方程式では、エネルギー - が指数関数的に増加するが、非線形の重力振子では、不規則に増減する。

2)モデル: 糸の長さを $L(t) = L_0(1 + \exp[\alpha t]) / (1 + A \exp[\alpha t])$ と変化 (引き上げ振子)

$$E = \frac{mL^2}{2} \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - mgL \cos\theta$$

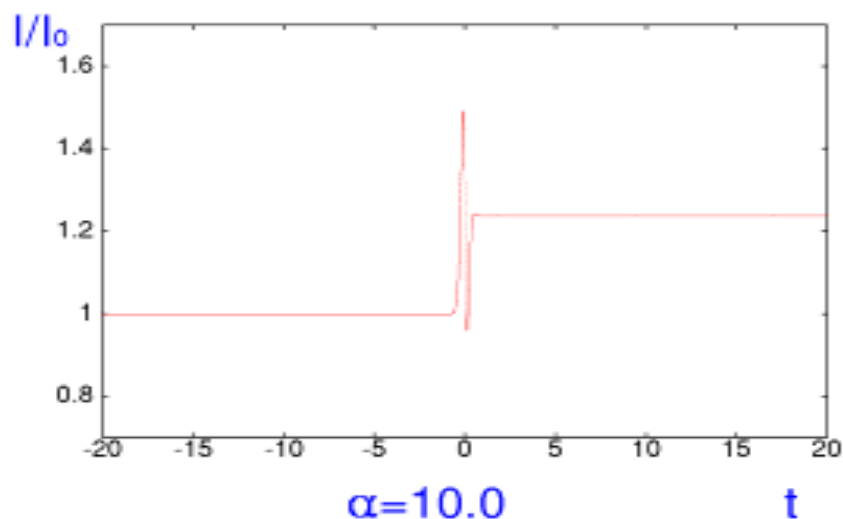
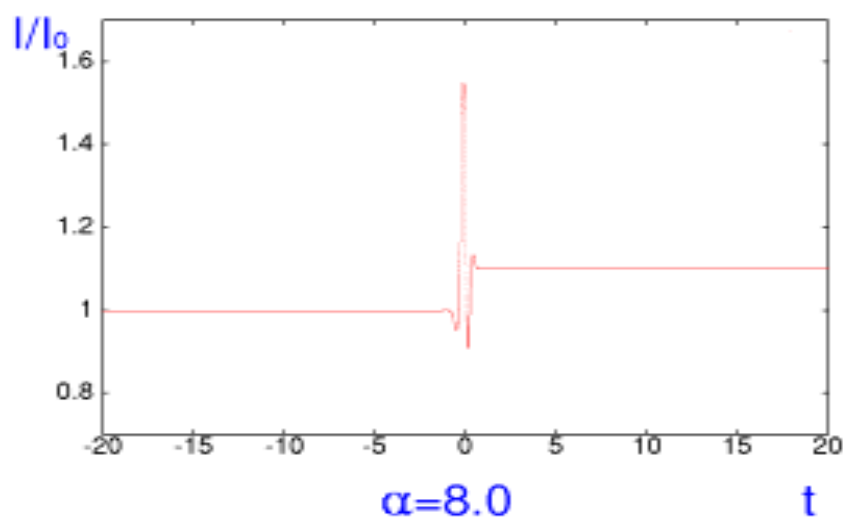
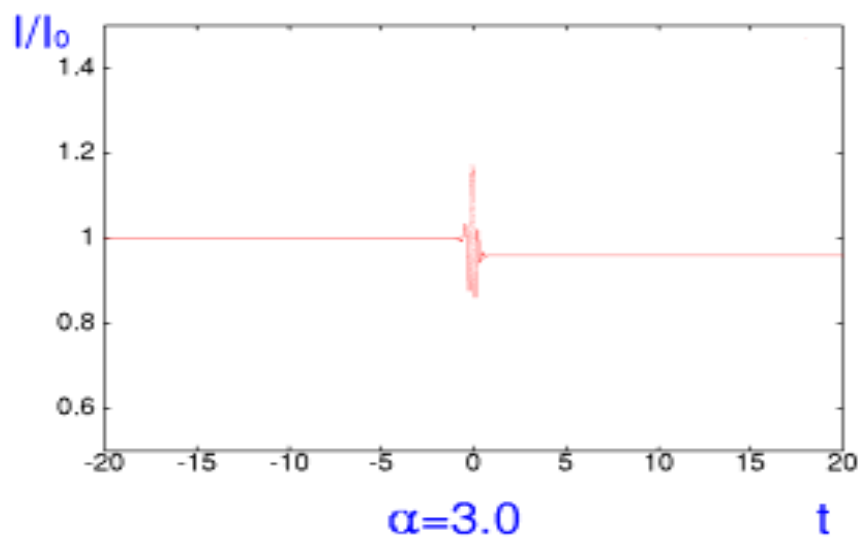
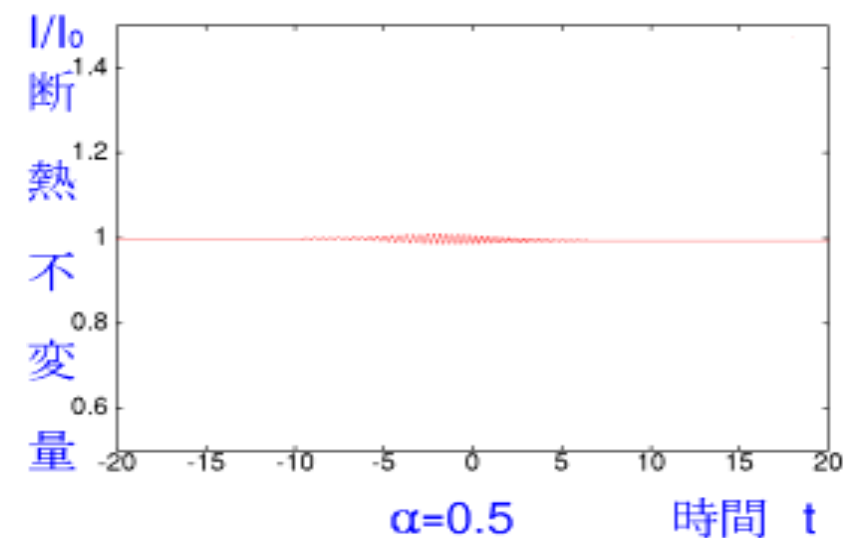
$$\omega(t)^2 = \omega_0^2 (1 + A \exp[\alpha t]) / (1 + \exp[\alpha t])$$

$$(\omega_0^2 = g / L_0)$$

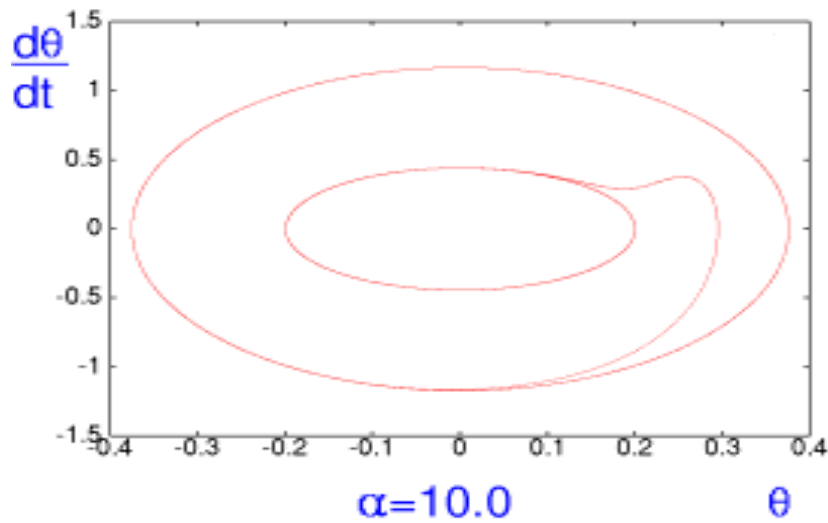
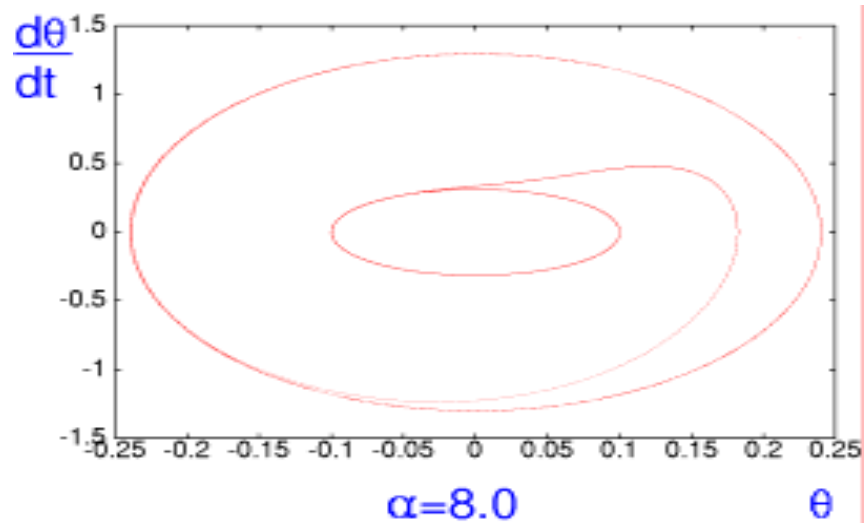
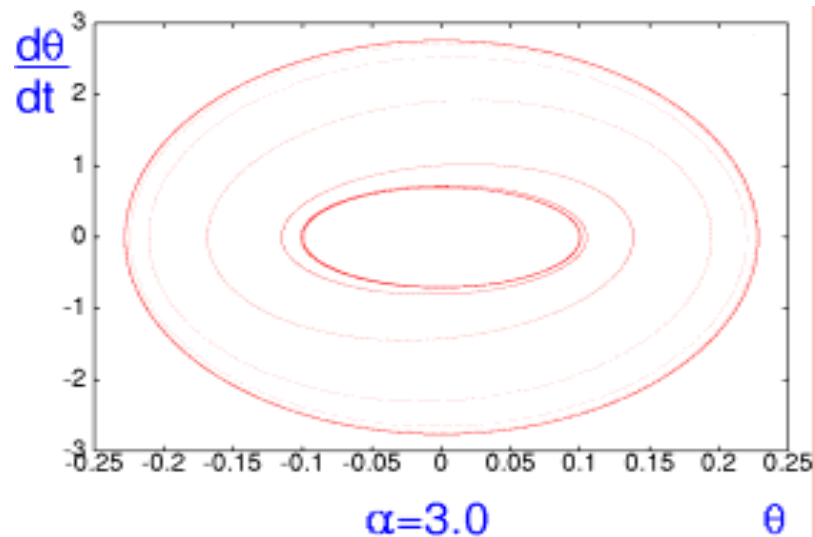
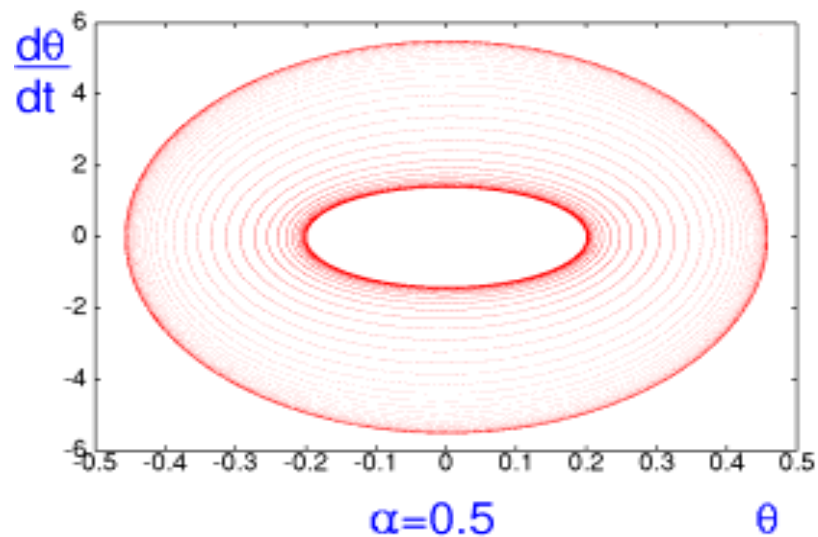


ここで断熱不変量 $E/\omega (=I)$ は、以下のようになる。
(ここで $E_0 / \omega_0 = I_0$ となる。)

断熱不変量 $I=(E/\omega)$ の変化



単振子の位相図



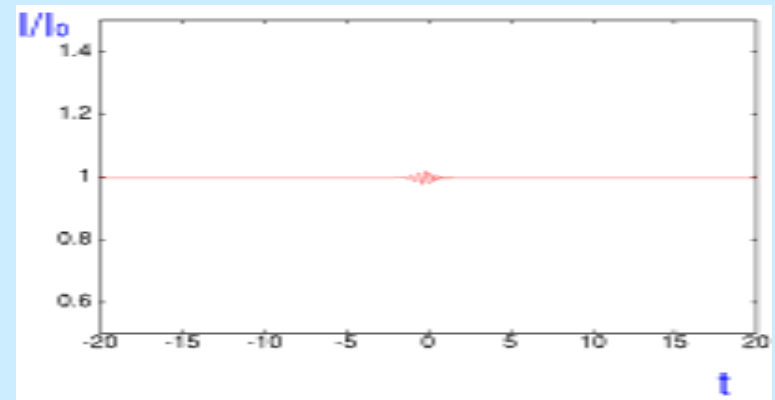
結果2

1. $(dL / dt) / L \ll \omega$ がよりよく満たされている場合
 $E / \omega (=I)$ は断熱不変量となる。

2. 調和振動子の断熱不変量に基づく正準変数を用いた
 運動方程式は

$$\dot{I} = -I \frac{\dot{\omega}}{\omega} \cos 2\varphi$$

$$\dot{\varphi} = \omega + \frac{\dot{\omega}}{2\omega} \sin 2\varphi$$



となる。これより $E / \omega (=I)$ は、近似的に断熱不変量とみなせる。