

2004 年 1 月 4 日

図の様に 2 枚の板 A, B の間で粒子が完全反射しながら往復する一次元系を考える。板 A, B の座標を x_A, x_B とする。板間距離は ℓ とする。さらに、板 A は $x_A(t) = a \cos \omega t$ で振動しているものとする。 $(\ell \gg a)$ 粒子の速さの時間変化を次の手順で考えよ。(図は省略)

(1) 時刻 t_1 での板 A と粒子の衝突を考え、衝突前後の粒子の速さ v_1, v_2 の関係を求めよ。簡単のため、板 A が左向きに動いているときに粒子が衝突するとせよ。

(2) その後粒子が板 B にぶつかりもどってきて、もう一度板 A と衝突する時刻 t_2 を t, ℓ, v_2 で表せ。

(3) 粒子の衝突速度、衝突時間の変化は次の式で与えられることを示せ。

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 - 2a\omega \sin \omega t, \\ t_2 &= t_1 + 2\ell/v_2 \end{aligned}$$

(4) 上記の写像は適当な変数変換をすると、

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n + I_{n+1}, \\ I_{n+1} &= I_n + K \sin \theta_n \end{aligned}$$

と等価である。これを標準写像という。 K は非線形性の強さを支配するパラメータとなっている。 I, θ ともに $(\text{mod } 2\pi)$ として、その変化を図示せよ。 K の値によりその変化の違いを調べよ。

(5) K の値に対して、 (I_n, θ_n) を plot せよ。その際、いくつかの初期値から初めたものを重ね書きせよ。 $0 \leq K \leq 3$ とする。

(6) I^2 および $\langle I^2 \rangle$ の時間変化を調べよ。その意味を考察せよ。ただし、 $\langle \dots \rangle$ は初期値に関する平均を意味する。