

Pade 近似に関するメモ—2003.11.30—

1 Pade 近似

Pade[$M|N$] 近似とは発散的な級数 (発散、もしくは収束が非常に遅いもの)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (1)$$

を

$$f(x) \sim \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_N x^N}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_M x^M} \quad (2)$$

なる有理多項式で近似するものである。もちろん、収束する有理近似列の存在を仮定している。両者の Taylor 級数が一致するように a_n, b_n を決定する。そのためには連立方程式

$$\sum_{j=1}^M c_{N+i-j} b_j = -c_{N+i} \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (3)$$

$$\sum_{j=0}^n c_{n-j} b_j = a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (4)$$

で b_j, a_n を決めればよい。一般性を失うことなく $b_0 = 1$ とおける。また、係数が $c_n = \chi^n \hat{c}_n (|\chi| < 1)$ と概ね幾何級数で落ちる場合には

$$a_n = \chi^n \hat{a}_n \quad b_n = \chi^n \hat{b}_n \quad (5)$$

と置くと

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M \hat{c}_{N+i-j} \hat{b}_j &= -\hat{c}_{N+i} \quad (1 \leq i \leq M) \\ \sum_{j=0}^n \hat{c}_{n-j} \hat{b}_j &= \hat{a}_n \quad (0 \leq n \leq N) \end{aligned} \quad (6)$$

がスケールされた $O(1)$ の係数の関係を与える。

式 (3) を行列で explicit に書くと次のようになる。

$$\begin{pmatrix} c_N & c_{N-1} & \dots & \dots & c_{N+1-M} \\ c_{N+1} & c_N & \dots & \dots & c_{N+2-M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{N+M-1} & c_{N+M-2} & \dots & \dots & c_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_M \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{N+1} \\ c_{N+2} \\ \dots \\ \dots \\ c_{N+M} \end{pmatrix} \quad (7)$$

展開係数の $M \times M$ 行列は $2M - 1$ 個の一次元列の shift からなることに注意する。(いわば独立な要素数は $2M - 1$ 個。) このような行列を係数とする連立方程式を解く問題を線形 Toeplitz 問題と呼び、この行列を Toeplitz 行列 (C とおく) という。経験的にこの線形問題は singular になる (ill-conditioned ともいう) ことが多いので解くときに注意が必要である。その場合、行列 C を LU 分解し、反復法を用いるとよい。特に、大きな連立方程式においては数値的な丸め誤差の累積で行列が singular になることもあるため、精度を維持するには上記の方法が良いようである。LU 分解とは、行列 C を

$$C = L \cdot U \quad (8)$$

と、ふたつの行列の積に分解することである。 L は下三角行列、 U は上三角行列である。つまり、一般に線形問題 $A \cdot x = b$ を、

$$L \cdot y = b, U \cdot x = y \quad (9)$$

と二組の連立方程式系に分解して、係数が三角行列の連立方程式が簡単に解けることを使うものである。

数学辞典によると、「係数 c_i を N 行 M 列に配した行列を Pade 表という。もし、 $f(x)$ の全ての Hankel 行列式

$$\begin{vmatrix} c_N & c_{N+1} & \dots & \dots & c_{N+M} \\ c_{N+1} & c_{N+2} & \dots & \dots & c_{N+1+M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{N+M} & c_{N+M+1} & \dots & \dots & c_{N+2M} \end{vmatrix} \quad (10)$$

が nonzero ならば、Pade 近似は一意に定まる。」また、

「 $f(x)$ を連分数表示した場合、すなわち

$$f(x) = \frac{c_0}{1} + \frac{\alpha_1 x}{1} + \frac{\alpha_1 x}{1} + \dots \quad (11)$$

$$= c_0 + \frac{\alpha_1 x}{1 + \frac{\alpha_2 x}{1 + \dots}} \quad (12)$$

に展開したとき、その第 $2N$ および第 $(2N+1)$ 有理近似式はそれぞれ $f(x)$ の $[N|N]$ 、 $[N+1|N+1]$ Pade 近似に等しい。」連分数展開は一意で収束性も良いから、収束や一意性の証明と関わる事実か??。実際、散乱問題などでは収束性や収束の加速性と関連して、連分数と Pade 近似の関係が論じられているようである。ただし、無理数の有理近似としての連分数展開は十分研究されているが、関数の連分数展開に関しては、まだ良くわかっていないことも多い。(tan z などの展開は有名。) 詳しくは、散乱問題の専門書など参照。

注意: すべての過程を programming すると大変そうだが、その必要はない。SSL2 や Numerical Recipes などのライブラリーを使って組み立てればよい。Toeplitz 行列や Hankel 行列については、MATLAB や NUMERICAL RECIPES などの数値計算の解説書が詳しいかもしれない。それについては別のメモで説明することにして、以下の節では pade 近似の練習問題をいくつか行うことにする。

おまけ: Toeplitz(1881-1940) いわく「クラスの半分は何を言ってもわからない、5 パーセントは何を言っても理解する、45 パーセントがわかるようにすれば良い。」

2 Pade 近似の利用

2.1 関数の近似

簡単な例題で、テイラー展開と異なるパデ近似の有効性をみる。

$$f(x) = [7 + (1 + x)^{4/3}]^{1/3} \quad (13)$$

$$= 2 + \frac{1}{9}x + \frac{1}{81}x^2 - \frac{49}{8748}x^3 + \frac{175}{78732}x^4 + \dots \quad (14)$$

この関数は $x = -1$ に branch point があるため、 $|x| < 1$ でのみ収束する。実際、Fig. 1 をみると $x \sim 2$ から exact な値からずれていくことがわかる。これを $[2|2]$ pade で係数を求めるめた結果も plot してある。収束半径を超えて $x \sim 10$ までよく近似できていることが確認できる。

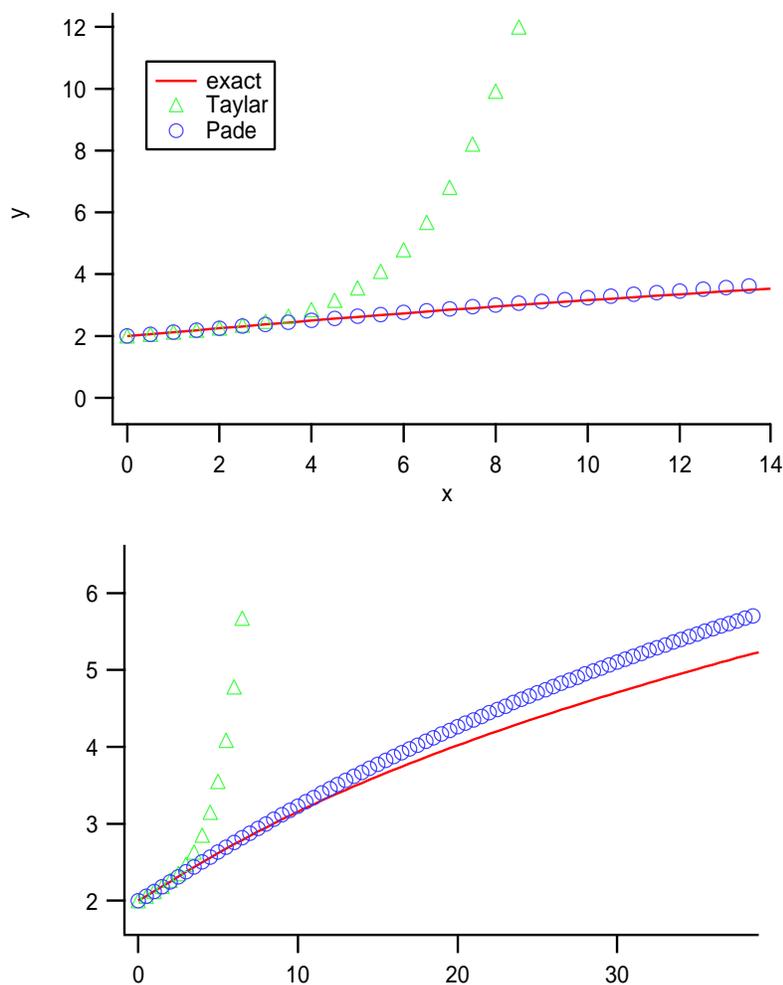


Figure 1: 極や分岐点をもつ簡単な関数に対するテイラー展開と Pade 近似の比較

次に、関数

$$f(x) = \left[\frac{1+2x}{1+x} \right]^{1/2} \quad (15)$$

の [3|3]pade 近似を求めると、

$$f(x) \sim \frac{64 + 304x + 472x^2 + 239x^3}{64 + 272x + 376x^2 + 169x^3} \quad (16)$$

となり、 $x \rightarrow \infty$ で厳密解 ($\sqrt{2} = 1.4142$) を再現する。つまり、収束半径を超えたところでも意味を持っている。もともと、収束半径を決めている特異点は、実軸上の高々一点でしかない。その特異点で関数は発散するが、複素空間を通過して解析接続可能であり、この点を超えても解を持つ。級数が発散する「いわゆる特異摂動問題」で Pade 近似が威力を発揮するわけだ。しかし、Pade 近似の数学的正当性に関する証明は無いようである。多くの数学的ミステリーが解析性に関わっているというが、Pade 近似もその一例であろう。ちなみに、Pade 近似が数学に現れて 150 年以上、物理に利用されて 40 年位の歴史がある。

2.2 相転移への応用

物理の問題へは、Ising 系などの相転移への応用として Pade 近似が用いられたものと思う。たとえば、帯磁率の低温展開計算において、いくつかの係数 c_n を得たとする。

$$\chi = \sum_n a_n u^n \quad (17)$$

u は温度や相互作用の適当な関数。その singularity が次のようになるとする。

$$\chi \sim (u - u_c)^{-\gamma} \quad (18)$$

このとき、対数微分を計算すると、

$$\frac{\chi'}{\chi} = \sum_n b_n u^n \sim \frac{\gamma}{(u - u_c)} \quad (19)$$

となる。つまり、Pade 近似を帯磁率の対数微分に使うことにより、臨界点と臨界指数を得ることができる。もちろん、この場合は Pade によるゼロ点分布に注意が要る。温度に対応させた場合、正の実軸上にくるものに物理的な特異点に対応していなければならない。そのため、変数を変換 ($u \rightarrow u'$) したりして、非物理的特異点を物理的特異点から遠ざけて、干渉しないようにするなどの工夫を要する。詳しくは、相転移の専門書。

このやり方は一般に利用できる。たとえば、

$$f(x) = (x - x_0)^{1/2} \quad (20)$$

という 2 位の分岐点を持つ関数でも、対数微分

$$\frac{d}{dx} \log f(x) = \frac{0.5}{(x - x_0)} \quad (21)$$

を用いてその pole と留数を計算することができる。一般に、 $f^{(n)}(x) \sim a(x - x_0)^\gamma$ ならば、

$$\frac{d}{dx} \log f^{(n)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{f^{(n)}(x)} \sim \frac{\gamma}{(x - x_0)}. \quad (22)$$

「Pade 近似は branch point よりも pole を探すのに適している。」 また、どこかで読んだが「有限個の分岐点をもつ場合の diagonal Pade はそのほとんどの極と零点を分岐点から発した弧に沿って生じる。」

2.3 自然境界のある関数への応用

自然境界を持つ例として有名な関数は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi^n x^{2^n}, \quad \chi > 0 \quad (23)$$

である。この場合、収束半径は $f(z) = \sum a_n x^n$ に対する Cauchy-Hadamard の定理より

$$r_c^{-1} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \Rightarrow r_c = \chi^{n/2^n} = 1 \quad (24)$$

である。この収束半径が自然境界を与えることを示すには、背理法を使う。(大雑把な証明) 収束半径上の一点 a に於いて、解析接続 $f(x)$ が存在し(つまりその一点が突破口) そこでこの収束半径が r とすると、 $x_{n,k} = ae^{ik/2^m}$ ($k = 0, 1, \dots, 2^m - 1$) に於いても収束半径 r を持つ事が証明できて(有限項をのぞいた $\sum_{n=m}^{\infty} \chi^n x^{2^n}$ が a 回りと同じ状況になっているのでこれが $x_{n,k}$ まで解析接続でき、よって $f(x)$ もそこまで解析接続可能。) これが、任意の n で言えるので結局収束半径は 1 より拡大され、矛盾する。よって突破口は存在せず、収束半径の外に向かって解析接続できない。

以下の数値計算での check に次の例を使う。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n} \quad (25)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n!} \quad (26)$$

((25) の証明) $|z| < 1$ に対して、

$$\left| \frac{z^{(n+1)!}}{z^{n!}} \right| = |z|^{(n+1)!} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \quad (27)$$

よってこの級数は収束し $f(z)$ は正則である。さて、

$$z = r \exp(2\pi i \frac{p}{q}) \quad (p, q \in \mathbb{N}, r > 0) \quad (28)$$

として、 $r \rightarrow 1$ を考える。 $n \geq q$ のとき、 $z^{n!} = r^{n!} (\exp 2\pi i \frac{p}{q})^{n!} = r^{n!}$ つまり、

$$f(z) = z + \dots + z^{(q-1)!} + \sum_{n=q}^{\infty} r^{n!} \rightarrow \infty (r \rightarrow 1) \quad (29)$$

と、発散する。 よって $z_0 = \exp 2\pi i \frac{p}{q}$ は特異点である。これは $|z| = 1$ の任意の点の近傍に存在する。どの点を中心にしても有限半径の収束円を描くことができず、 $|z| = 1$ を超えての解析接続は不可能である（証明終）。 級数（26）の場合の証明も同様で、 $|z| = 1$ が自然境界を与える。

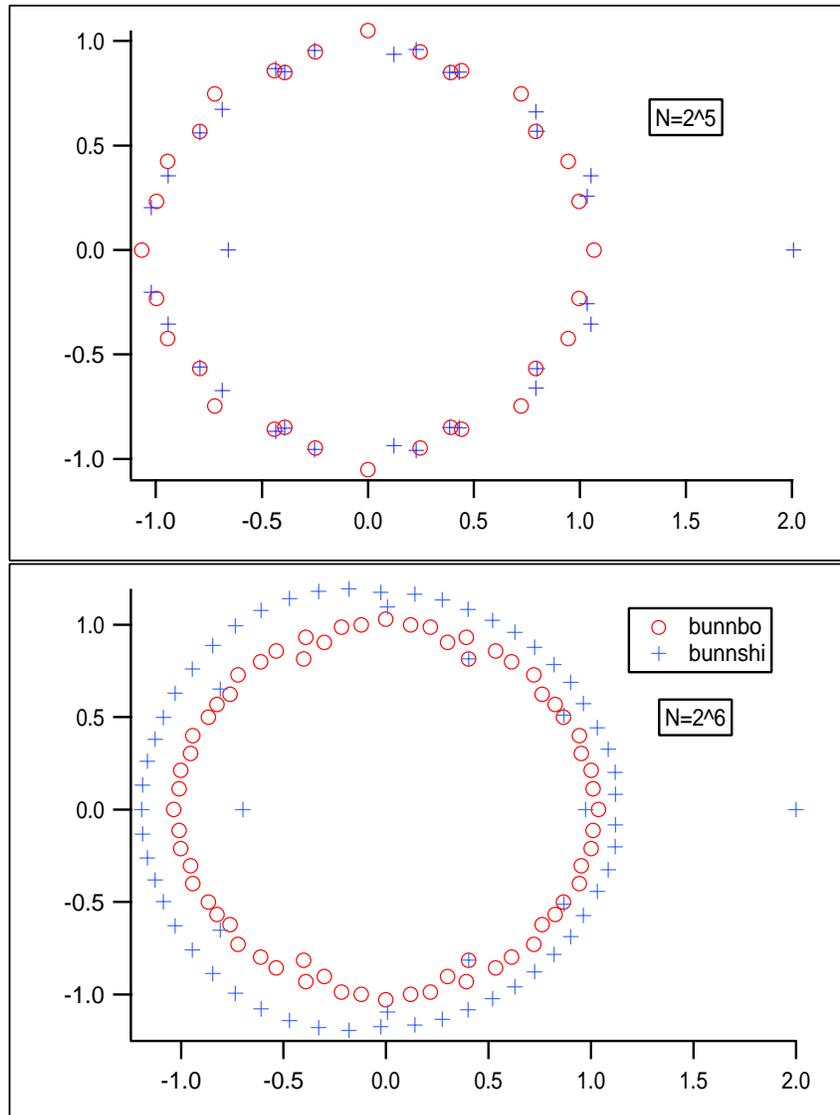


Figure 2: 自然境界を $|z| = 1$ にもつ関数の pade 近似による分母、分子の零点分布。

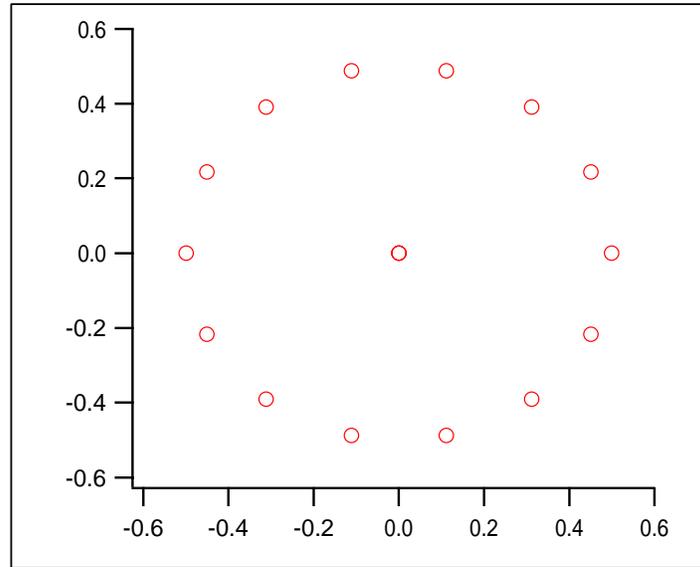


Figure 3: $f(x) = \sum_{n=0}^N 2^n x^n$ の場合。 $N = 32$. 分母の零点。 ただし、原点の点は、入力ミスなので無意味。 収束半径は $|z| = 0.5$

級数 (26) の場合に Pade 近似を使った数値計算の結果を Fig.2 に示す。 使う係数の数が 64 個 ($N = 32$)、128 個の場合における、分母、分子のゼロ点が重ねて plot してある。(つまり、64 個のものなら、 $x^1, x^2, x^4, x^8, x^{16}, x^{32}, x^{64}$ の係数だけが 1 で他は 0。) どちらも解析解の $|z| = 1$ 周辺に集積していく。 また、 $N = 32$ では分子の零点が分母の零点と近い値を持つが、 $N = 64$ の場合には分子のゼロ点と近い分母の零点を cancell しても $|z| = 1$ に集積する傾向が確認できる。

Fig.3 の図は check のために行った関数、

$$f(x) = \sum_{n=0}^N 2^n x^n \quad (30)$$

の場合の Pade 近似での分母の零点分布である。 比較的少ない項数でも解析的な収束半径 $r_c = 1/2$ に対応する $|z| = 1/2$ に、きれいに零点が集積していく。

2.4 定理

自然境界を check するのに使える。

- *< Weierstrass >*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{b_n}, b \in N, b \neq 1 \quad (31)$$

a_n が正数。 このとき、 $|z| = 1$ が収束円であれば、 $|z| = 1$ は自然境界である。

- *< Hadamard >* の Gap Theorem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n} \quad (32)$$

a_n が正数、 λ^n は単調増加な自然数列。このとき、次の条件を満たせば、 $|z| = 1$ は自然境界である。

$$\liminf \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_n} > 0 \quad (33)$$

さらに、Barck により条件は弱められた。

$$\liminf \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} > 0 \quad (34)$$

- *< Fabry >* 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$ の収束半径が 1 であり、次の条件を満たせば、 $|z| = 1$ は自然境界である。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} = \infty \quad (35)$$

2.5 局在問題

ランダム系の局在問題でも、Green 関数、

$$G(z) = \frac{1}{z - H} \quad (36)$$

の解析性を議論する。simple pole は局在状態 (の固有値)、縮退していたら 2 位、3 位の pole。Branch cut は extended states に対応することは明らか。さらに、自然境界は、 H の連続スペクトルのなかにある局在状態に対応??? これらは、Hamiltonian がエルミートゆえ、実軸上でのものだが、複素ベクトルポテンシャルや散逸を Hamiltonian が含む場合には、複素空間に広がる。詳しくは、Green 関数の本を参照せよ。

3 力学系への応用

力学系の問題に関して、この方法は Berretti たちによって、Golden-KAM-tori 摂動強度パラメータを複素化してその自然境界性を示すのにつかわれた。

3.1 Semstandard map の場合の係数

standard map を考察する。

$$\Theta_{n+1} + \Theta_{n-1} - 2\Theta_n + k \sin(\Theta_n) = 0 \quad (37)$$

こいつは k が小さい極限で KAM トーラス解を持つ。 θ を角度変数として共役関数 $F(\theta)$ が存在し運動

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega \quad (38)$$

に従う解、 $\Theta_n = F(\theta_n) = F(\omega n + \theta_0)$ が存在する。ここに θ_0 は任意定数。これが KAM トーラス。以下では Green-Percival の論文で扱われた Semi-standard-map の不変曲線の角度変数微分に関して pade 近似がどれほど work するかを調べてみる。semi-standard map の不変曲線は、関数方程式

$$q(\theta + \omega) + q(\theta - \omega) - 2q(\theta) = ik \exp\{iq(\theta)\} \quad (39)$$

の解である。ここで、 $q(\theta) = \theta + g(\theta)/i$ とおき、 x に関し展開する。

$$g(\theta) = \sum_{j=1} b_j x^j \quad \text{where} \quad x = ke^{i\theta} \quad (40)$$

また、 $\exp g(\theta) = \sum_{j=0} c_j x^j$ と展開する。このとき、次のように展開係数を決定する漸化式を得る。

$$nc_n = \sum_{m=1}^n mb_m c_{n-m} \quad (41)$$

$$D_n b_n = c_{n-1}, \quad D_n = 4 \sin^2 n\pi\alpha$$

with $c_0 = 1$, and $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$. こうすると、 b_j は指数関数的に増大する。(図参照) それを適当にべき修正して $b'_j = r^j b_j \sim 1$ になるようにしたのがも plot してある。(小さくしすぎた??) これらの図の縦軸は \log を取っている。

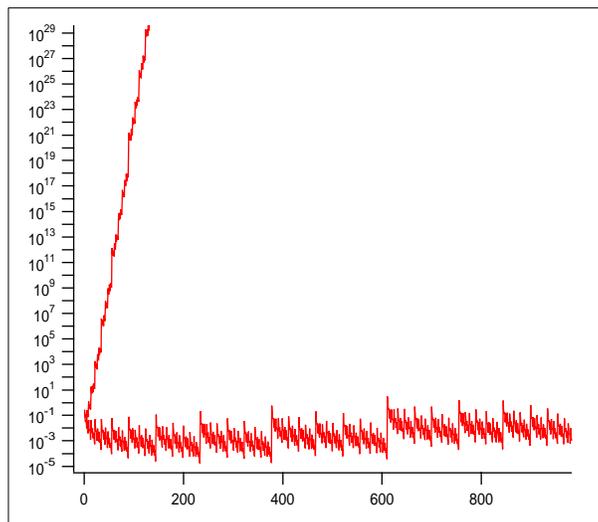


Figure 4: semi-standardmap に対する係数列と scale した後の係数列。ランダムでなくて、まさに Fractal。Harper model と通ずる。

$$g = \sum_{j=1} b_j x^j = \sum_{j=1} b'_j (x/r)^j \quad b'_j = r^j b_j$$

$$dg(\theta)/d\theta = ik/r \sum_{j=1} j b'_j (x/r)^{j-1} \quad (42)$$

の収束半径は x/r を変数と見なすと $|x/r| = 1$ に来るように調節されている。こいつに Pade を行い、分母関数の pole の位置を示した。確かに $|x/r| = 1$ 上への pole の集積が観測される。図を見よ。

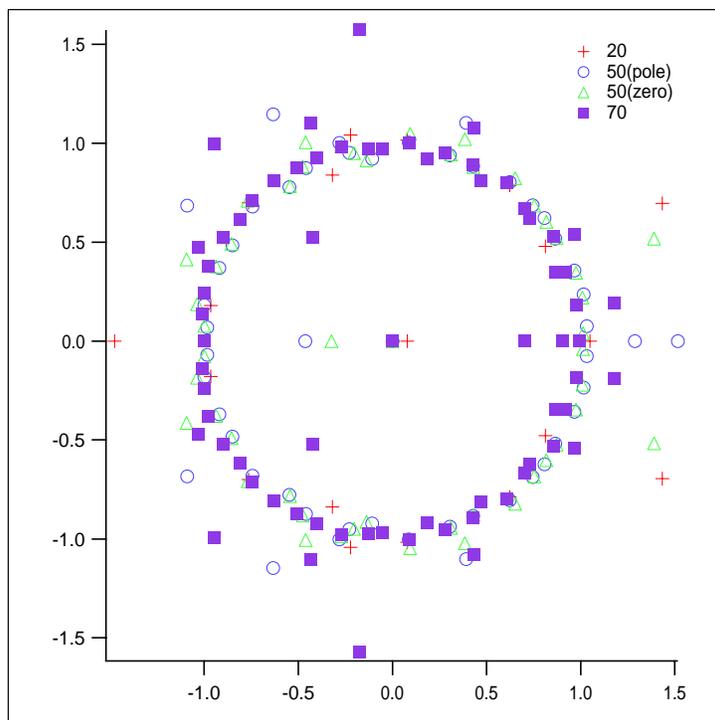


Figure 5: semi-standardmap に対する Pade 近似による分母の零点分布。N=20,50,70 を plot。N=50 の場合は分子の零点も plot。係数は上の図のものを用いている。注意：この図は半年以上前に作成したもので、そのときは多少のエラーがあったが、そのままの version。正確な図は文献に多く見られるのでそれを参照。

3.2 力学系文献にみる Pade 近似使用上の注意 (かなり私見も含む)

- diagonal Pade ($[N|N]$) が most accurate と思われる。N としては、20、50、精々 80 位で行っているものが多い。最近の文献 [3] では $N = 240$ もみられる。次数を変えて、大きく動く零点は有意なものでないと思われる。
- 次数をあげても分子、分母の係数の収束性はないと思われる。分母の Pole の位置や集積の仕方に関しては、次数を上げて収束性を check すべきである。特に、分布の対称性が悪いものは、高次のオーダーまでとり収束を確かめるべきであろう。つまり、分子、分母の次数をひとつ増減させただけで、係数全てが変化する。これは、Pade 展開が無限展開を打ち切ったものでないという事実と関わる。
- 分母の零点と分子の零点が pair になることが典型的に生じるようである。これは、pole-zero ghost pairs とか spurious pole-zero pairs と呼ばれている。pair になった零点は singularity の評価から取り除くべき。plot して、評価してもいいが、これを数値的

に評価するには各 pole (つまり分母の各零点) に関して留数を計算し、その大きさが小さいものは pair と見なしてしまうという方法が systematic でよいかもしれない。

- pole の集積で一般の singularity を探ろうとしているわけであるが、数学的には分岐点、真性特異点、自然境界を現せるかどうかについては不明。孤立特異点や極のみの可積分系の関数にのみ保障されるようだ。
- 大きな値の pole がある場合には、より高い精度の計算が必要である。このこととも関わるであろうが、一度大雑把に収束半径を評価し (ρ とする)、 $\epsilon \rightarrow \epsilon/\rho$ とスケールして、収束半径を 1 のオーダーとするべき。
- pole と zero が交互に並ぶとその先には、分岐点がある。(簡単な関数で要確認)
- ランダムな係数を持つ多項式の pole は円状に集積する。(図をみよ。) こんなこともあるので、慎重に使うべきであろう。
-

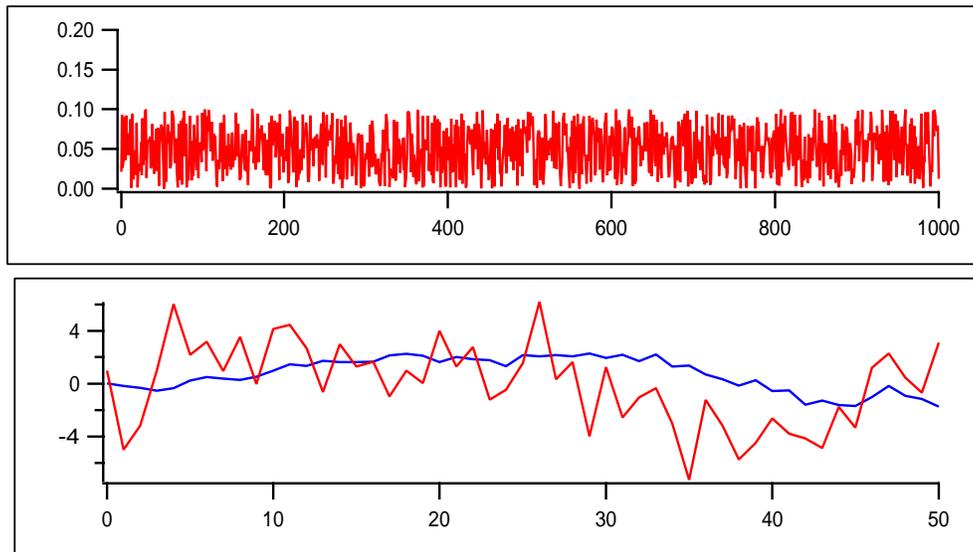


Figure 6: (上) $[0, 0.1]$ の値の適当な一様乱数列。この中にはじめの 100 個を係数として使う。(下) $[50|50]$ Padé 近似で得られた、分母、分子の多項式における係数。つまり、 a_n, b_n .

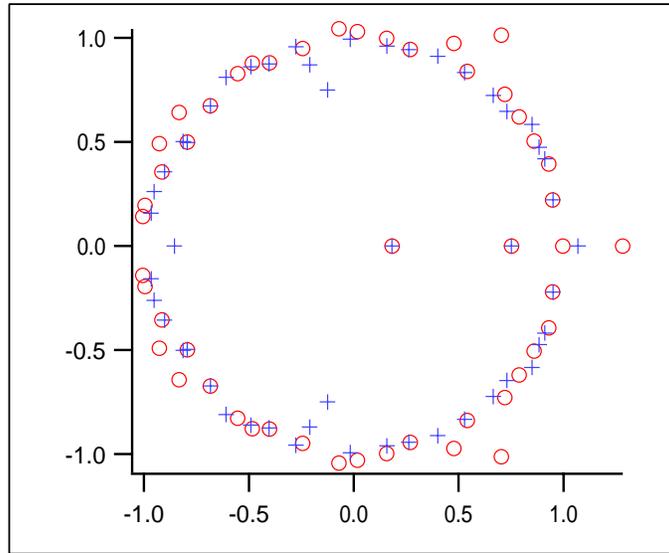


Figure 7: 乱数列による係数を100個使った場合の分母、分子の零点分布。赤が分母、青が分子

3.3 Standard Map 系への応用

繰り返しになるが、共役関数 (Hull 関数) $u(\theta, \epsilon, \omega)$ の満たす方程式を

$$u(\theta + \omega) - 2u(\theta) + u(\theta - \omega) = \epsilon f(\theta + u(\theta)) \quad (43)$$

とする。この関数方程式の解を、 ϵ に関して Taylor 展開、 θ に関しては Fourier 展開する。(Lindstedt 級数)

$$u(\theta, \epsilon, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\theta, \omega) \epsilon^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} \epsilon^n e^{ik\theta} \quad (44)$$

これ θ, ϵ, ω にかんする解析性を Pade 近似で調べたい。関数方程式の左辺の 2 階 ω 差分演算子を D_ω の固有値 $2i \sin(\pi\omega)$ において、共鳴による小さな分母の問題が発生する。それを克服する方法として、(1) super convergence 法、(2) direct method, (3) tree expansion などがある。

簡単なメモを列挙しておく。ここでの [...] は文献番号の次の [...] に対応。

- $f(x) = \sin x$ (standard map) の場合、all diophantin ω (有理数から遠いもの) に対し、円になる。($\theta: \text{Fix}$ で ϵ パデ)
- ω が有理数 (p/q) に近いとき、 $2q$ 個の line がはいる。 $(-1)^{2q}$ の根に対応。この場合、higher order の Pade が必要。(ϵ パデ) [*1][*2]
- ω を complexify する。正則化。散逸を入れることに対応。 [*1][9][12]
- $\xi \equiv e^{i\theta}$ ($\epsilon: \text{Fix}$) についての Pade。 [8][10]
- $\text{Re} \omega = 0$ で $\text{Im} \omega$ のもの。 [L1]
- $f(x)$ を多 \sin 関数に拡張 [8]

References

- [1] 注意：文献番号の次の [...] は yamada の整理の都合のもの。
- [2] Pade で自然境界を近似する怪しげなロシア論文がある（池田談）ようだが、、、
- [3] [*2] A. Berretti and C. Falcolini, and G. Gentile, Phs. Rev. E **64**, 015202-1(2001). Gentile の web-site には文献がある。
- [4] [*1] A. Berretti and S. Marmi, Chaos, Solitons and Fractals, **5**, 257(1995). この時点までの Review。
- [5] [9] A. Berretti and S. Marmi, Phys. Rev. Lett. **68**, 1443(1992). アイデアと結果が compact にまとめている。
- [6] [L1] Rafael de la Llave and Stathis Tompaidis, Phys. Rev. Lett. **73**, 1459(1994). 位数 2 の分岐点の集積として、解析接続可能領域の境界を示す。
- [7] [L2] Rafael de la Llave and Stathis Tompaidis, Physica D **71**, 55(1994). Pade 近似と Greene の方法。
- [8] [8] A. Berretti, A. Celletti, L. Chierchia and C. Falcolini, J. Stat. Phys. **66**, 1613(1992). ϵ と $\zeta = e^{i\theta}$ の Pade. 及び techniq と注意点。
- [9] [*2[12]] C. Falcolini and Rafael de la Llave, J. Stat. Phys. **67**, 645(1992). Pade 計算上の注意点。
- [10] [7] A. Berretti and Luigi Chierchia, Nonlinearity **3**, 39(1990). アイデアと preliminary な数値結果を示した初期の論文。
- [11] [12] S. Marmi and Jaroslav Stark, Nonlinearity **5**, 743(1992). critical $U(\epsilon_c)$, modular smoothing 。Brjuno 関数。
- [12] [10] A. Berretti and Safano Marmi, Nonlinearity **7**, 603(1994). 中身は scaling の話。Pade は使っている。 $\zeta = e^{i\theta}$ の pole や零点計算もある。単振り子での check。
- [13] John M. Geene and Ian C. Percival, Physica D **3**, 530(1981). Pade は使っていないが complex KAM の singularity を評価している。
- [14] George A. Jr Baker and Peter Graves-Morris, *Pade Approximants 2nd edition*, (Cambridge University Press, 1996) . ISBN: 0521450071 検索した限りはこらが最新版。同一著者の類似のもの多数。2 万円位するのでできれば、研究室で購入を。
- [15] George A. Baker, *Essentials of Pade Approximants* (Academic Press, 1975) ASIN: 012074855X . フロリダの古本屋から通販で購入。直だと Amazon.com にマージンを取られずにすむ。
- [16] George A. Baker and John L. Gammel *The Pade Approximant in Theoretical Physics*
- [17] 著者?? タイトルがきになったもの。 *Pade approximants method and its applications to mechanics* (Springer-Verlag, 1975) ASIN: 038707614X

- [18] **タイトルがきになったもの。** *Pade and Rational Approximation: Theory and Applications: Proceedings of an International Symposium Held at the University of South Florida, Tampa*, by Conference on Rational Approximation With Emphasis on Applications, (Academic Press, 1977) ASIN: 0126141509