

固有関数

1 Harper 固有関数

ノート「Harper 方程式と固有状態の特異性」と重複する部分もあるが、まず固有関数の性質のいくつかを、計算結果により確認しておく。

$$t\Psi_{n+1} + t\Psi_{n-1} + V_n\Psi_n = E\Psi_n \quad (1)$$

$$V_n = 2V \cos(2\pi\alpha n + \phi_0). \quad (2)$$

図の説明など図中または Figure Caption の中に記します。system は中心に対称。Fibonacci 数 (nfib=///) で total size N で書かれている。通常、 $t = -1$ に設定。

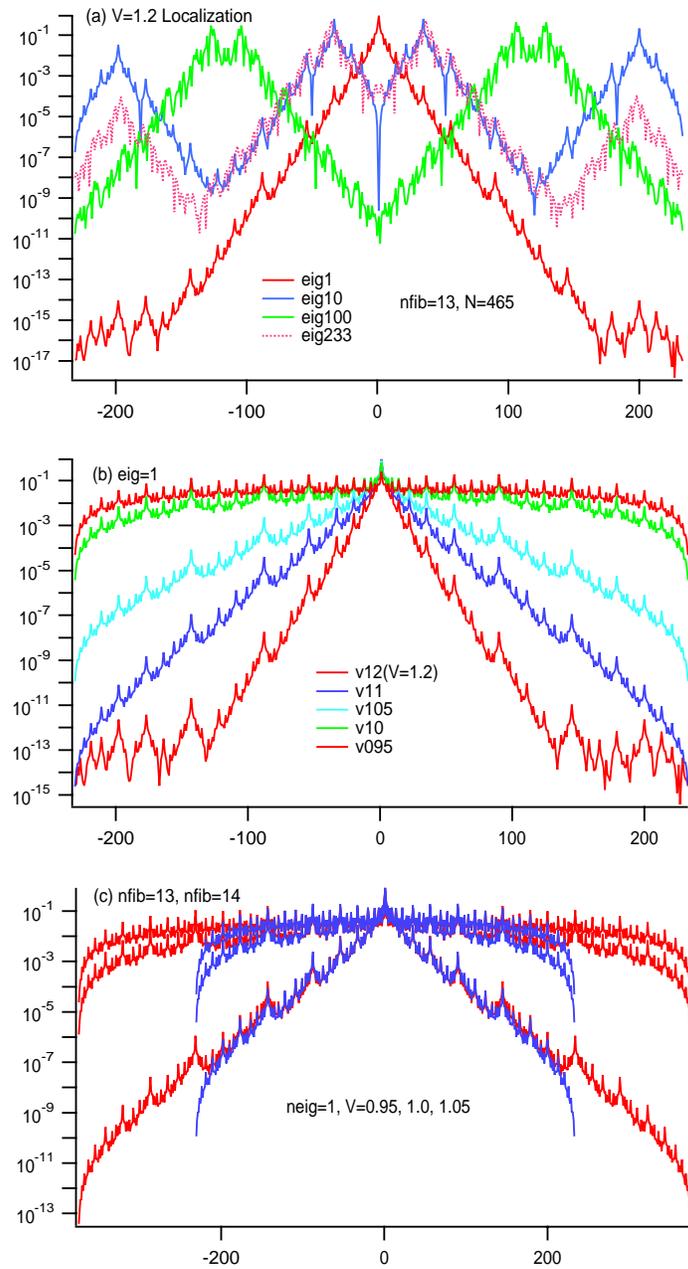


Figure 1: 局在状態のいくつかの固有関数。 $\log |\Psi_n|$ vs n . (a) eig1, eig10 などは、energy の高い固有状態から 1 番目、10 番目などに対応している。 (b) 1 番目の固有状態を potential 強度 V を変えて計算したもの。 V_{12} は $V = 1.2$ などを表す。 v_{10} は臨界。 v_{095} は $V = 0.95$ は extended state に対応。 (c) サイズを変えて、局在、臨界、広がり状態の変化を確認した。

確認できたこと、

- (い) 局在状態の局在長はエネルギーに依存しない。
- (ろ) 局在から臨界、非局在まで、揺らぎ部分はよく対応している。
- (は) 境界付近ではずれがでるが、中心付近は Fib 数やサイズに依存しない。

これらを踏まえて、Fib 数 13 で、一番 energy の高い固有状態に対して、散逸性を調べていく。

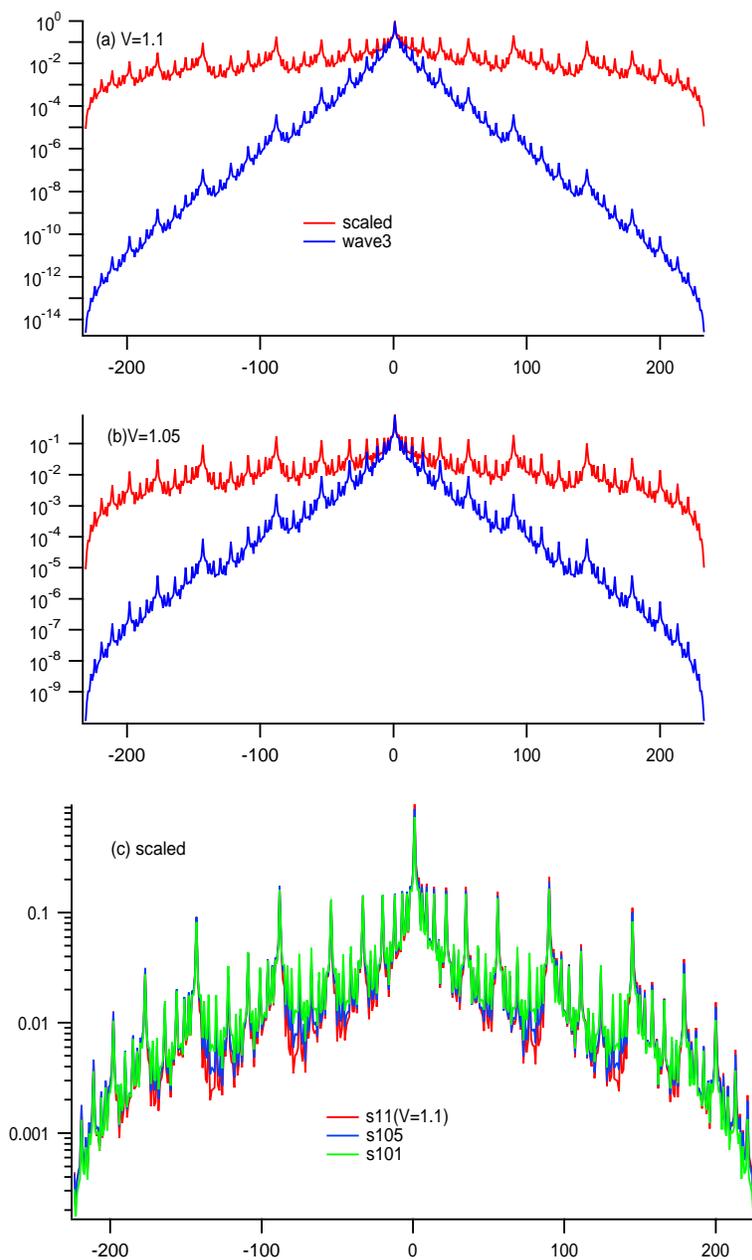


Figure 2: 局在長でスケールした固有関数ともとの固有関数。局在長は $\log |V/2t|$ 。(a) $V = 1.1$, (b) $V = 1.05$. (c) scale した後の固有関数を重ねたもの。

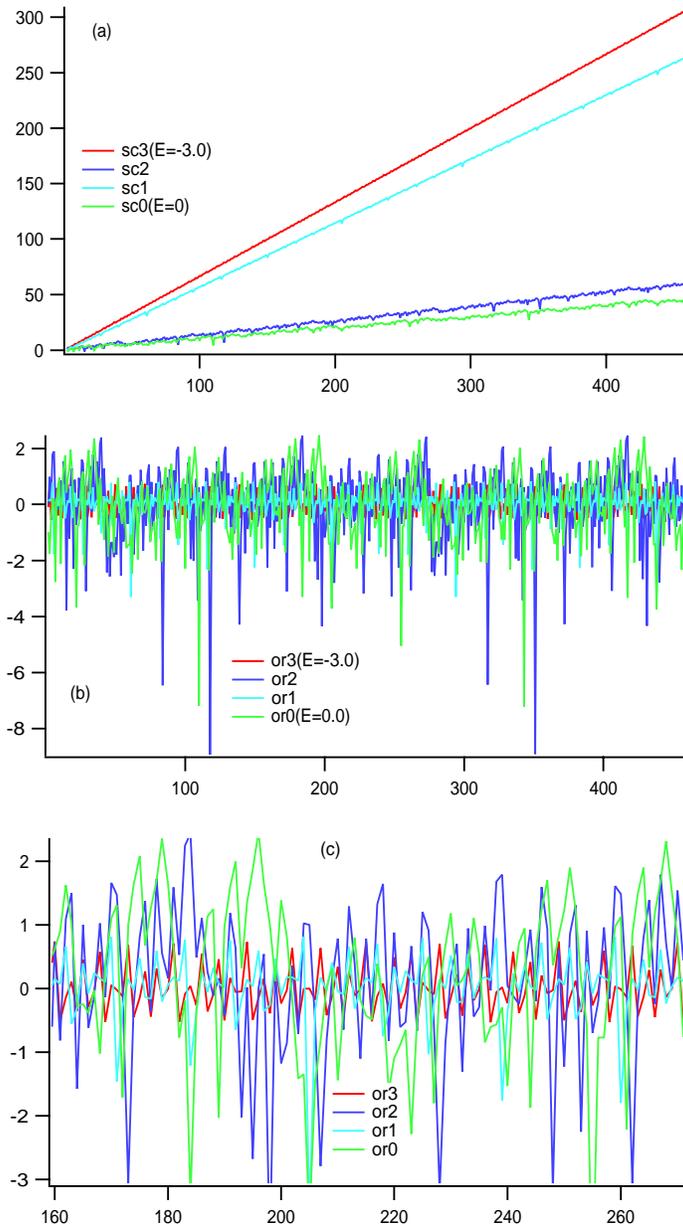


Figure 3: エネルギーを適当に選んでの波動関数の増大の様子。。 $\log |\Psi_n|$ vs n . (a) それぞれ $E = -3, -2, -1, 0$ に対応。(b) 指数関数を最小二乗 fitting して取り除いた揺らぎ。(c) 拡大図。
 $\gamma = (\sum_{n=1}^N \log |\Psi_n / \Psi_{n-1}|) / N$ で定義してもよい。

Harper においては、 V 変化で固有状態 1 つの性質の変化で、局在、臨界、広がり、と転移をみる。次に、エネルギーに依存する系、つまり移動度端を持つ系を考えよう。ノート「Harper 方程式と固有状態の特異性」に記した系は確かに移動度端をもつが、我々が見たいのは揺らぎの特異性（フラクタル性）である。このタイプの揺らぎが、ひっからまることにより不可逆性を生じせしめるという予想からである。それは、incomensurate な系であろう。SK-model は

\cos をもつが、 income でなくてもいいので、特殊である。さらに、一般化して、

$$V_n = V[\cos(2\pi Q_1 n) + s \cos(2\pi Q_2 n)], . \quad (3)$$

$Q_1 = 1/\lambda, Q_2 = 1/\lambda^2$ で λ は cubic equation $x^3 - x - 1 = 0$ の実根 $\lambda = 1.32472\dots$ である。格子の周期は 1 なので、三つの振動数を most incommensurate にする spiral mean である。JR-model とする。(Johsson and Riklund 90)

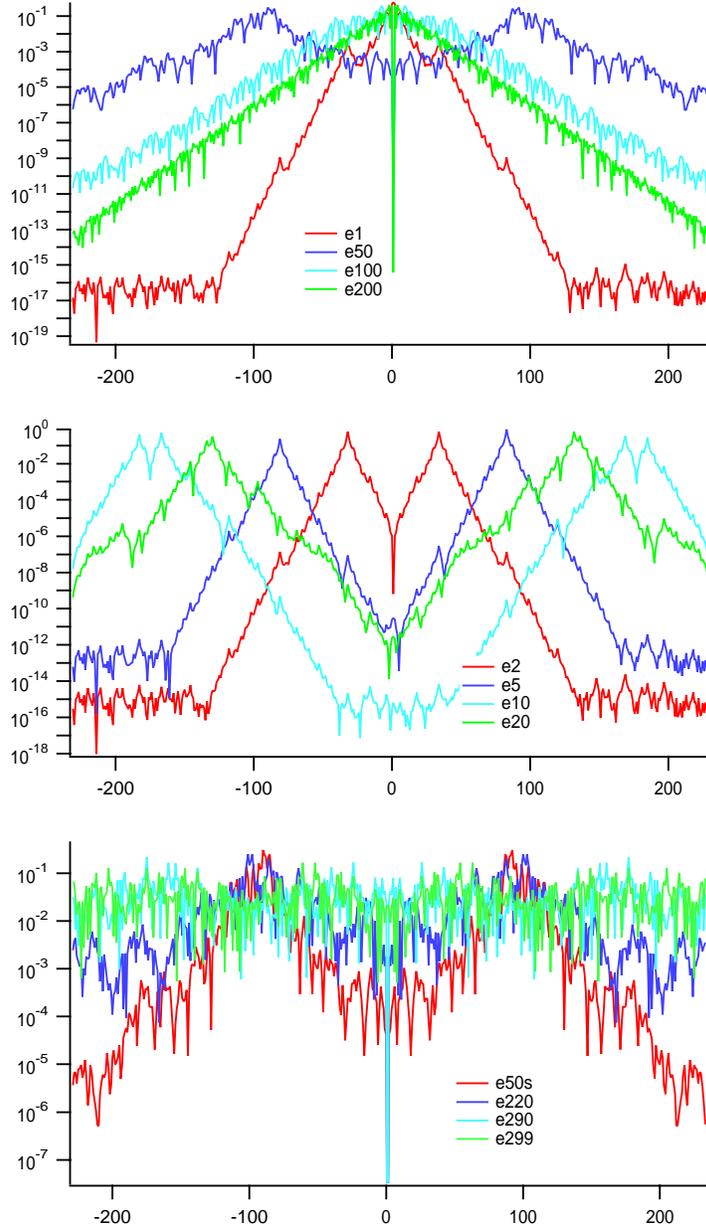


Figure 4: JR-model での固有関数。 $V = 0.8, s = 1$. (a),(b),(c) とも、 e_1, e_{50} はエネルギーが上から 1 番目、50 番目、... などの固有状態を表す。エネルギーは、 $e_1 = 2.360772, e_{50} = 2.1686159, e_{100} = 1.9382\dots, e_{200} = 0.7257\dots, e_2 = 2.360627, e_5 = 2.354\dots, e_{10} = 2.32919\dots, e_{20} = 2.2856\dots, e_{220} = 0.124054\dots, e_{290} = -0.8739\dots, e_{299} = -0.9343\dots$ 。つまり、局在長はエネルギーに依存し、局在から非局在に転移する。incommensurate な振動に起因するフラクタルな揺らぎが存在する。Harper と相補的に使える可能性がある。

さらに、hopping を第二隣接まで拡張したモデルもあり、移動度端をもつ。(Johsson and Riklund 91)

$$t(\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1}) + u(\Psi_{n+2} + \Psi_{n-2}) + V_n \Psi_n = E \Psi_n \quad (4)$$

$$V_n = V[\cos(Qn) + W \cos(2Qn)]. \quad (5)$$

この dual は

$$[2t \cos(Qn) + 2u \cos(2Qn)]g_m + \frac{V}{2}(g_{m+1} + g_{m-1}) + \frac{VW}{2}(g_{m+2} + g_{m-2}) = E g_m, \quad (6)$$

であり、 $V = 2t, W = u/t$ で self-dual である。

References

- [1] M. Johsson and R. Riklund, Phys. Rev. B **42**, 8244(1990).
- [2] M. Johsson and R. Riklund, Phys. Rev. B **43**, 13468(1991).